Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Әдістемелік нұсқаулар.

Құрастырған жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

6 - тақырып. **Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Әдістемелік нұсқаулар.**

Қатарлар жинақтылығының анықтамасын қолданып, жинақтылыққа зерттеу керек.

№2727 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$

$$1=An+A+Bn$$

$$\begin{cases}0=A+B\\1=A\end{cases}$$

$$A=1;B=-1$$

Ендеше

$$u_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$$

$$u_2=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$u_3=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$ Ендеше қатар жинақты қатар.

№2729 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}$$

$$1=3An+A+3Bn-2B$$

$$\begin{cases}0=3A+3B\\1=A-2B\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{3};B=-\frac{1}{3}$$

Ендеше

Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Әдістемелік нұсқаулар.

Құрастырған жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{3n-2} - \frac{\frac{1}{3}}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$u_1 = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3}(1-\frac{1}{4})$$

$$u_2 = \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})$$

$$u_3 = \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$$

:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\ldots\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$ Ендеше қатар жинақты қатар.

№2733 $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\ S_1 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

$$b_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}\ S_2 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ендеше қатар жинақты қатар.

№ 2773

$$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ Ендеше қатар жинақсыз қатар.

№ 2776

$$\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1000} = 0{,}1 \neq 0$$

Ендеше қатар жинақсыз қатар.

№ 2776-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \ldots \frac{n}{3n+1} + \ldots$$

Жалпы мүшесі $u_n = \dfrac{n}{3n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$ Ендеше қатар жинақсыз қатар.

№ 2776-2

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

Қатарды жинақтылыққа 3- салыстыру белгісімен зерттейік:

$\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ -жинақсыз қатар

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ Ендеше екеуі де жинақсыз қатарлар

№ 2737

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2m-1}} + \ldots$$

Қатарды жинақтылыққа 1- салыстыру белгісімен зерттейік:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^m} + \ldots$ -жинақты қатар

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^2}; \dfrac{1}{3\cdot 2^2} < \dfrac{1}{2^2} \ldots \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} < \dfrac{1}{2^m}$ Ендеше екеуі де жинақты қатарлар.

№ 2740

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)} + \ldots$$

$1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} \ldots + \dfrac{1}{n^2} + \ldots$-жинақты қатар

$\dfrac{1}{2\cdot 5} < 1; \dfrac{1}{3\cdot 6} < \dfrac{1}{2} \ldots \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+4)} < \dfrac{1}{n^2}$ Ендеше екеуі де жинақты қатарлар.

№ 2738

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2^m} + \ldots$$

Қатарды жинақтылыққа 1- салыстыру белгісімен зерттейік:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^m} + \ldots$ -жинақты қатар

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{0}{0}=\left|\begin{matrix}\sin\frac{\pi}{2^n}\approx\frac{\pi}{2^n}\\ n\to\infty\end{matrix}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi$ Ендеше екеуі де жинақты қатарлар.

№ 2743

$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{n^2+1}+...$

Қатарды жинақтылыққа 3- салыстыру белгісімен зерттейік:

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}...+\frac{1}{n^2}+...$-жинақты қатар

$\frac{1}{2}<1;\frac{1}{5}<\frac{1}{2^2}...\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$ Ендеше екеуі де жинақты қатарлар

№ 2741

$\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{4}{15}+...++\frac{n+1}{(n+2)n}+...$

Қатарды жинақтылыққа 3- салыстыру белгісімен зерттейік:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ -жинақсыз қатар

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(n+2)\cdot n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$ Ендеше екеуі де жинақсыз қатарлар.

Кошидің радикалдық белгісі

№ 2763

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+...+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+...$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=\frac{1}{\infty}=0<1$$

Ендеше қатар жинақты қатар.

№ 2776

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Ендеше қатар жинақты қатар.

Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Әдістемелік нұсқаулар.

Құрастырған жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

№ 2766

$$\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3}$$

$$==\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{3}=\frac{e}{3}<1$$

Ендеше қатар жинақты қатар.

Кошидің интегралдық белгісі

№ 2776-2

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

$$\int_1^\infty\frac{dn}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln|2n+1|\ \Big|_1^\infty=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\infty-\ln 3)=\infty$$

Ендеше жинақсыз қатар.

№ 2743

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$$

$$\int_1^\infty\frac{dn}{n^2+1}=arctgn\ \Big|_1^\infty=$$

$$=arctg\infty-arctg1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Ендеше жинақты қатар

№ 2740

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\ldots$$

$$\int_1^\infty\frac{dn}{(n+1)(n+4)}=\int_1^\infty\frac{Adn}{n+1}+\int_1^\infty\frac{Bdn}{n+4}=$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+4}$$

$$1=An+4A+Bn+B$$

Оң таңбалы қатарлар. Қатар қосындысы. Қатар жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Әдістемелік нұсқаулар.

Құрастырған жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 4A + B \end{cases} \quad 3A = 1 \quad A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\int_1^\infty \frac{dn}{(n+1)(n+4)} = \int_1^\infty \frac{Adn}{n+1} + \int_1^\infty \frac{Bdn}{n+4} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{dn}{n+1} - \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{dn}{n+4} = \frac{1}{3}\ln\frac{n+1}{n+4}\Big|_1^\infty = \frac{1}{3}\left(\ln 1 - \ln\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$$

Ендеше жинақты қатар.